Concours d'Administrateur Externe de l'Insee 2017

Epreuves écrites d'admissibilité

SESSION 2017

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet : INSEE administrateur externe

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 5 pages, numérotées de 2 à 6.

L'épreuve est constituée de deux parties indépendantes, chacune comptant pour moitié dans la note finale.

L'usage de la calculatrice est interdit

Tournez la page S.V.P.

Partie 1 : Analyse-algèbre

On considère un entier n supérieur ou égal à 2, $a_1, a_2, \dots, a_n$, n nombres complexes donnés et la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire la matrice dont les termes diagonaux sont $1+a_1$, $1+a_2, \dots, 1+a_n$ et dont tous les autres termes valent 1.

Partie A

On suppose dans cette partie que les nombres a_i, $i \in [\![1, n]\!]$, sont réels.

1. Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable.
2. On suppose dans cette question que, pour tout j de $[\![1, n]\!]$, $a_j = j - 1$.
   (a) Montrer que le réel λ est valeur propre de A si et seulement si λ vérifie :
   $$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda - k} = 1.$$
   (b) On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, \dots, n-1\}$ par :
   $$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x-k}.$$
   En étudiant la fonction f_n, montrer que A admet n valeurs propres réelles distinctes.
   (c) On note λ_n la plus grande valeur propre de A.
      i. Établir, pour tout réel y positif, l'inégalité suivante :
      $$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{y+j} \leqslant \int_0^n \frac{1}{t+y} dt.$$
      ii. En déduire que $f_n(n + \frac{n}{e-1}) \leqslant 1$.
      iii. Montrer de même que $f_n(n - 1 + \frac{n}{e-1}) \geqslant 1$.
   (d) Déduire de ce qui précède un équivalent simple de λ_n quand n tend vers $+\infty$:
   $$\lambda_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{ne}{e-1}.$$

Partie B

On revient dans cette partie au cas général où les a_i sont des nombres complexes et on se propose d'étudier l'inversibilité de A.

À cet effet, on considère les deux matrices-colonnes X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et le système (S) :

$AX = Y$.

On pose $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

3. Écrire le système d'équations vérifié par les x_i.
4. On suppose dans cette question qu'aucun des a_i est nul.

(a) Montrer que, si $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} \neq -1$, la matrice A est inversible.

(b) Dans le cas où $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} = -1$, déterminer $\mathrm{Im} A$ et donner, lorsqu'elles existent, les solutions de l'équation $AX = Y$.

5. On suppose, dans cette question, que seul $a_1 = 0$, les autres a_i étant non nuls. Résoudre l'équation $AX = Y$. La matrice A est-elle inversible ?

6. Déduire de l'étude précédente une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible.

Partie C

On s'intéresse dans cette partie à la diagonalisation de A.

7. (a) En utilisant les résultats de la partie B, donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un complexe λ, différent de chacun des a_i, soit valeur propre de A.
   (b) En déduire une équation polynômiale de degré n, fonction des a_i, satisfaite par les valeurs propres de A qui sont distinctes des a_i.
   (c) Donner, pour chacune de ces valeurs propres, la dimension et une base du sous-espace propre associé.

8. On étudie dans cette question le fait qu'un des a_i puisse être valeur propre de A.
   (a) Montrer, toujours à l'aide de la partie B, que si, pour tout i de $[\![2, n]\!]$, $a_i \neq a_1$, alors a_1 ne peut pas être valeur propre de A.
   (b) On suppose dans cette question que $a_1 = a_2 \ldots = a_p$ ($p \geqslant 2$) et que les autres a_i sont distincts de a_1. Montrer que a_1 est valeur propre de A et donner la dimension du sous-espace propre correspondant.

9. On suppose que, parmi les a_i, il n'y a au total que q valeurs distinctes dont q_1 n'apparaissent qu'une seule fois et q_2 au moins deux fois. On renumérote les a_i et on note :

   - a'_i, $i \in [\![1, q_1]\!]$ les valeurs distinctes des a_i n'apparaissant qu'une seule fois dans la matrice A.
   - a''_j, $j \in [\![1, q_2]\!]$ les valeurs des a_i apparaissant chacune en nombre N_j dans la matrice A.

   On a donc :
$$n = q_1 + \sum_{j=1}^{q_2} N_j.$$
   (a) En utilisant les résultats de la question 7, montrer que toute valeur propre de A, distincte de chacun des a_i, satisfait une équation polynômiale de degré q et que, réciproquement, toute racine de cette équation est valeur propre de A.
   (b) On suppose que cette équation possède r racines distinctes. Calculer la somme des dimensions des sous-espaces propres de A identifiés dans les questions $7(c)$ et $8(b)$.
   (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Partie D

On revient dans cette partie au cas où les a_i sont réels et on se propose de redémontrer, par des considérations analytiques, que A est diagonalisable.

10. Montrer que toutes les valeurs propres de A sont réelles.

11. On considère une équation, d'inconnue complexe z, de la forme $\sum_{i=1}^{q} \frac{\alpha_i}{z - b_i} = 1$, où les α_i sont des réels strictement positifs et les b_i des complexes distincts.
   (a) Montrer que cette équation est équivalente à l'équation polynômiale $Q(z) = 0$, où :
$$Q(X) = P(X) - \sum_{j=1}^{q} \alpha_j P_j(X),$$
   avec : $P(X) = \prod_{i=1}^{q} (X - b_i)$ et $P(X) = (X - b_j)P_j(X)$, où $j \in [\![1, q]\!]$.

(b) On suppose que z est une racine double de Q. Établir l'égalité suivante :

$$P'(z) - \sum_{j=1}^{q} \alpha_j P_j'(z) = P'(z) \left(1 - \sum_{j=1}^{q} \frac{\alpha_j}{z - b_j} \right) + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \frac{P_j(z)}{z - b_j},$$

puis que :

$$0 = P(z) \sum_{j=1}^{q} \frac{\alpha_j}{(z - b_j)^2}.$$

(c) En déduire, que si les b_i sont réels, le polynôme Q ne peut admettre de racine double réelle.

12. Conclure.

Partie 2 : Probabilités-statistiques

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants.

Exercice 1

On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes et suivant toutes les deux la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$), c'est-à-dire qu'une densité de X et de Y est donnée par :

$$f_X(t) = f_Y(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \text{ si } t \geqslant 0 \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On pose $T = X - Y$ et $Z = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Z et vérifier que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
2. (a) Déterminer une densité de $-Y$.
   (b) À l'aide d'un produit de convolution, déterminer une densité de $X - Y$.
   (c) Donner la fonction de répartition de T.
3. On pose $W = (T, Z)$ et on note F_W la fonction de répartition de W.
   (a) i. Établir, pour tout couple (t, z) de réels positifs, la formule suivante :

   $$F_W(t,z) = \int_0^z \left(\int_0^{y+t} f_X(x)\mathrm{d}x \right) f_Y(y)\mathrm{d}y + \int_z^{+\infty} \left(\int_0^z f_X(x)\mathrm{d}x \right) f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

   ii. En déduire, pour tout couple (t, z) de réels positifs, l'expression explicite de $F_W(t, z)$ en fonction de z et de t.

   (b) i. Établir, pour tout couple (t, z) de réels, avec z positif et t négatif, la formule suivante :

   $$F_W(t,z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \left(\int_{x-t}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y}\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

   ii. En déduire l'expression de $F_W(t, z)$ pour z positif et t négatif.
4. Montrer que Z et T sont indépendantes.

Exercice 2

Préliminaires

$\boxed{\text{P1}}$ On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2, de carré intégrable et non constantes.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{Var}(X_1 X_2) = \mathrm{Var}(X_1)\mathrm{Var}(X_2)$.

$\boxed{\text{P2}}$ Soit (X, U) un couple de variables aléatoires réelles suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mu^2 & 0\\ 0 & \sigma^2\end{pmatrix}\right)$ avec $\mu > 0$ et $\sigma > 0$. On pose $Y = a + bX + U$, où a et b sont des paramètres réels.
Déterminer la loi du couple (X, Y) et donner sa densité. On notera $\mathcal{L}(a, b, \mu, \sigma)$ la loi trouvée.

■ ■ ■ ■ ■ ■

On considère maintenant, dans la suite du problème, une suite de couples de variables aléatoires réelles, (X_i, Y_i), indépendants entre eux, de même loi $\mathcal{L}(a, b, \mu, \sigma)$. On suppose que l'on dispose de N observations de ces couples, pour $i \in [\![1, N]\!]$. Sauf mention explicite du contraire, les quatre paramètres a, b, μ, σ sont inconnus et feront l'objet d'estimations.

1. (a) Construire un estimateur de a, sans biais, fondé sur les seules observations de Y_i, que l'on notera $\hat{a}_Y$.
   (b) Calculer la variance de $\hat{a}_Y$ et montrer que cet estimateur est convergent.
   (c) Dans le cas où b, μ, σ sont connus, proposer un test de l'hypothèse nulle $H_0 : \{a = 0\}$, fondé sur cet estimateur, avec un risque de première espèce (*probabilité de rejeter l'hypothèse nulle alors qu'elle vraie*) de valeur donnée $\alpha \in]0, 1[$.
   On exprimera le résultat au moyen de la fonction de répartition Φ de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

2. On suppose dans cette question $\boxed{\mu \text{ connu}}$.
   (a) À partir de la considération de $\mathbb{E}(X_i Y_i)$, utiliser la méthode des moments pour déterminer un estimateur sans biais et convergent de b (*on ne demande pas de démontrer explicitement les propriétés demandées*).
   (b) Donner la variance de cet estimateur (*on rappelle que, si* $T \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, $\mathrm{Var}(T^2) = 2$).

3. (a) Dans le modèle linéaire $Y_i = a + bX_i + U_i$, donner la valeur de l'estimateur des moindres carrés ordinaires de b, noté $\hat{b}_0$ (*on l'exprimera en fonction de* b *et des variables* X_i *et* U_i).
   (b) Étudier sa convergence lorsque N tend vers $+\infty$.
   (c) Calculer sa variance.
   On fera ici l'approximation $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \overline{X}_N\right)^2 \approx \mu^2$, *valable pour* N *assez grand, avec* $\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$.

4. Toujours dans ce même modèle linéaire, on considère l'estimateur des moindres carrés ordinaires de a, soit $\hat{a}_0$.
   (a) Donner l'expression de $\hat{a}_0$ en fonction des paramètres, de $\hat{b}_0$ et des variables X_i et U_i.
   (b) En déduire la variance de $\hat{a}_0$.
   (c) Comparer cette variance à celle de $\hat{a}_Y$.

5. On suppose que, pour des raisons de confidentialité, les variables X_i ont été « floutées », c'est-à-dire que l'on ne peut observer que les variables $X_i^* = X_i + \varepsilon_i$, où les ε_i sont des variables aléatoires indépendantes entre elles, indépendantes des (X_i, U_i) et suivant toutes la loi $\mathcal{N}(0, \beta^2)$ avec $\beta > 0$.
   (a) Déterminer la loi conditionnelle de X_i sachant $[X_i^* = x^*]$.
   (b) Montrer que le modèle linéaire de la question 3(a) peut alors s'écrire sous la forme $Y_i = a + bX_i^* + U_i^*$, où les U_i^* sont d'espérance nulle et à définir en fonction des variables et des paramètres préexistants.
   (c) Montrer que l'estimateur des moindres carrés ordinaires de b dans ce nouveau modèle, noté $\hat{b}_0^*$, n'est pas convergent. Quelles conclusions pratiques en tirez-vous vis-à-vis des utilisateurs de ces données ?

SESSION 2017

COMPOSITION D'ÉCONOMIE

Sujet : INSEE administrateur externe

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 2 pages, numérotées de 1 et 2.

Tous documents et appareils électroniques interdits.

Tournez la page S.V.P.

Dissertation (13 points)

Quelle politique économique pour lutter contre le changement climatique ?

La dissertation a pour objet de vérifier la capacité des candidats à mobiliser la théorie et les concepts micro- et macroéconomiques afin d'analyser des situations concrètes. Les candidats veilleront ainsi à montrer dans quelle mesure les outils de l'économiste permettent de penser les problèmes économiques actuels, et de leur apporter des solutions.

Exercice (7 points)

On considère un agent-ménage disposant d'une richesse initiale W_0, ne travaillant pas, et face au choix de la répartition de sa richesse épargnée entre deux supports d'épargne, un actif sûr (de type compte courant) et un actif risqué (de type actions en bourse).

Le rendement/taux d'intérêt de l'actif sûr est nul. Le rendement de l'actif risqué peut prendre deux valeurs : soit $r_b < 0$ (avec une probabilité π), soit $r_h > 0$ (avec une probabilité $1 - \pi$). On notera α la fraction de son épargne placée en actif risqué. On impose $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Pour simplifier l'analyse, on adopte une approche statique : l'agent, disposant de W_0€, effectue son choix de ventilation de l'épargne et immédiatement après, il en retire les fruits, aléatoires, pour consommer intégralement ce dont il dispose. Dit autrement, tout se passe comme si l'agent vivait deux périodes : en $t = 0$, il choisit la façon de répartir son épargne consistant en l'intégralité de sa richesse initiale, sans consommer (ni retirer la moindre utilité), et en $t = 1$, il consomme sa richesse accumulée $\tilde{W}_1$. On négligera le facteur d'escompte entre ces deux périodes.

On note $u(W)$ l'utilité retirée de la consommation de W€. On suppose par ailleurs que les préférences de l'agent face au risque sont telles qu'elles peuvent être représentées par l'utilité espérée.

1. Quels sont les 3 grands types d'attitude vis-à-vis du risque d'un agent (soyez concis(e)) ?
2. Exprimez la richesse à l'issue du placement, $\tilde{W}_1$, pour les différentes réalisations possibles du rendement risqué.
3. Ecrivez le programme de l'agent choisissant α. Résolvez-le pour obtenir la condition du premier ordre sur son choix de portefeuille optimal, noté α^* (soit une expression faisant intervenir, entre autres, α^*, la fonction u et/ou sa dérivée).
4. On considère ici (questions 4 à 6) que la fonction d'utilité est à aversion relative au risque constante et unitaire, soit :

   $$u(W) = ln(W)$$

   Montrez que le choix de α^* est fourni par l'expression suivante (on pourra admettre ce résultat pour les questions 5 et 6) :

   $$\alpha^* = -\frac{1}{r_b r_h}(\pi r_b + (1 - \pi) r_h)$$

5. Si l'actif risqué a un rendement espéré nul, que vaut α^* ? Quel est l'effet d'une augmentation de la richesse initiale W_0 sur le choix de α^* ? Ce résultat vous semble-t-il intuitif ? Expliquez.
6. Considérons que $r_b = -0.1$; $r_h = 0.15$ et $\pi = 0.4$. Cela aboutit à un rendement espéré de l'actif risqué de 5% et un écart-type du rendement d'environ 12%, soit des caractéristiques proches de celles du rendement du portefeuille de marché des actions sur longue période en France comme aux Etats-Unis. Quel choix de portefeuille l'agent effectuera-t-il (en tenant éventuellement compte des limites imposées au choix) ?
7. Dans la réalité, les ménages français ne détiennent qu'une très faible fraction de leur richesse financière en actions, et une part conséquente en actifs sûrs, au rendement réel proche de 0. D'après vous, qu'est-ce qui manque à ce modèle, très frustre, qui le rapprocherait des choix effectifs des ménages français ?
8. On suppose ici, et dans le reste de l'exercice, que la fonction d'utilité est à aversion absolue au risque constante, soit :

$$u(W) = -e^{-\gamma W}$$

avec $\gamma > 0$ l'aversion absolue au risque. Montrez que α^* est donné par :

$$\alpha^* = \frac{1}{\gamma W_0 (r_h - r_b)} ln\left(\frac{r_h(1-\pi)}{-r_b \pi}\right)$$

9. Si l'actif risqué a un rendement espéré nul, que vaut α^* ? Expliquez soigneusement.
10. Quel est l'effet d'une augmentation de la richesse initiale W_0 sur α^* ? Ce résultat vous semble-t-il contre-intuitif ? Si oui, pourquoi ? Qu'est-ce qui permettrait de l'expliquer ?