CONCOURS ADMINISTRATEUR EXTERNE DE L'INSEE

SESSION 2018

COMPOSITION D'ÉCONOMIE

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 2 pages, numérotées de 1 à 2.

Tous documents et appareils électroniques interdits.

Tournez la page S.V.P.

Concours d'administrateur externe de l'INSEE
Epreuves écrites d'admissibilité
Avril 2018

Epreuve écrite d'économie
Durée de l'épreuve : 4h
Tous documents et appareils électroniques interdits

Dissertation (13 points)

Quels indicateurs pour mesurer le progrès économique au 21ème siècle ?

La dissertation a pour objet de vérifier la capacité des candidats à mobiliser la théorie et les concepts micro- et macroéconomiques, afin d'analyser des situations concrètes. Les candidats prendront le temps d'expliquer le sens des concepts mobilisés, en faisant usage d'un vocabulaire économique. Au travers d'un plan structuré, apparent et informatif, ils veilleront à montrer dans quelle mesure les outils de l'économiste permettent de penser les problèmes économiques actuels, et de leur apporter des solutions.

Exercice (7 points)

On considère une économie composée d'une firme produisant un unique bien et de la population de la seule ville considérée, dont tous les membres travaillent dans la firme susmentionnée et dont on agrégera les comportements en celui d'un travailleur représentatif.
La firme utilise exclusivement du travail en quantité N pour produire, et sa fonction de production s'écrit :

$$Y = AN^{1/2}$$

où Y et A sont respectivement la quantité de biens produite et un paramètre strictement positif. La firme rémunère les travailleurs au salaire par unité de travail, W. On suppose que le marché du travail et le marché des biens fonctionnent de manière parfaitement concurrentielle. En produisant, la firme engendre de la pollution, qui nuit au bien-être des travailleurs. La quantité de pollution F est supposée égale à la production : $F = Y$. Initialement, il n'y a pas d'Etat, donc aucune forme de taxe ni de transfert.
Les préférences du travailleur représentatif sont représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$U(C, N, F) = F^{-\eta}\left[\alpha C - \frac{1}{2}N^2\right]$$

où C désigne la consommation réelle du travailleur. α et η sont deux paramètres constants tels que $\alpha > 0$ et $0 < \eta < 1$. Le profit de la firme est intégralement reversé aux travailleurs qui consomment celui-ci, ainsi que la totalité de leurs salaires, en biens en quantité C. On considérera l'unique bien produit comme numéraire : son prix unitaire $P = 1$.
L'objet de cet exercice est de construire l'équilibre décentralisé en présence de pollution, de le comparer à l'optimum de premier rang, puis de mettre en place une fiscalité permettant d'atteindre l'optimum.

1. Comment appelle-t-on l'effet de la pollution sur les ménages/travailleurs ? Pourquoi le dénomme-t-on ainsi ?
2. Ecrivez le programme de la firme (en environnement parfaitement concurrentiel) et déduisez-en sa demande de travail en fonction du salaire W et du paramètre A.

3. Ecrivez la contrainte budgétaire du travailleur, puis posez le programme du travailleur choisissant librement sa consommation C et son offre de travail N^s. Déduisez-en l'offre de travail en fonction du salaire W et du paramètre α.
4. Calculez l'équilibre concurrentiel. Montrez que la quantité de travail d'équilibre s'écrit :

$$N^{equ} = \left(\frac{\alpha A}{2}\right)^{2/3}$$

5. On cherche ici à calculer l'optimum de premier rang. Dans ce cas, on ne distingue pas la firme du travailleur représentatif. On remarque simplement que la production de la firme, qui se répartit en masse salariale et profit, revient intégralement au travailleur, en sorte que le travailleur consomme exactement l'intégralité de la production de la firme. Posez le programme du planificateur, soit le travailleur internalisant (i) le fait que sa consommation doit être produite à partir de travail, suivant la fonction de production et (ii) le fait que la pollution provient de l'activité productive. Résolvez-le et exprimez la quantité de travail fournie à l'optimum en fonction de α, A et η.
6. Comparer les quantités de travail à l'équilibre décentralisé et à l'optimum. Expliquez soigneusement pourquoi l'une est plus élevée que l'autre.
7. On envisage la mise en place d'une taxe à la production τ par unité de bien produit. Réécrivez le programme de la firme plongée dans un environnement parfaitement concurrentiel et déduisez-en sa demande de travail en fonction de τ, A et W.
8. Le produit de la taxe est intégralement reversé aux travailleurs, en plus du salaire et des profits. Que doit valoir la taxe τ pour que l'utilité des travailleurs soit maximale à l'équilibre ? Qu'est-ce que l'instauration de la taxe a rendu possible ? Comment s'appelle cette taxe ?
9. A la place de la taxe sur la production, on envisage de créer une cotisation employeur τ_w acquittée par la firme et portant sur les salaires. Sachant que les recettes de ce prélèvement sont intégralement reversées au travailleur sous forme forfaitaire, quel niveau du taux de taxe τ_w permettrait d'atteindre l'utilité maximale pour les travailleurs ?

CONCOURS ADMINISTRATEUR EXTERNE DE L'INSEE

SESSION 2018

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 7 pages, numérotées de 1 à 7.

Tous documents et appareils électroniques interdits.

Tournez la page S.V.P.

Concours administrateur Insee externe 2018

L'épreuve est constituée de deux parties indépendantes, chacune comptant pour moitié dans la note finale.

Partie 1 : analyse-algèbre

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants

Exercice 1

Dans tout l'exercice, x désigne un réel appartenant à $]0,1[$.

1. (a) Établir, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'égalité suivante :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$$

   (b) En déduire la formule suivante :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$$

2. On définit la fonction f par :

$$\forall x \in]0,1[, \quad f(x) = -\ln(1-x) - \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\mathrm{d}t$$

et pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n par :

$$\forall x \in]0,1[, \quad f_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} - \int_1^{n} \frac{x^t}{t}\mathrm{d}t$$

   (a) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\mathrm{d}t$ converge.

   (b) Établir, pour tout couple d'entiers naturel (n,N), $N > n \geqslant 1$, l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant f_n(x) - f_N(x) \leqslant \frac{x^n}{n} - \frac{x^N}{N}$$

   (c) En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f.

3. On définit la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ par :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln n$$

   (a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente ; on note γ sa limite.

   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f_n(x) = S_n$.

4. En utilisant, entre autre, le résultat de la question 2(c), montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \gamma$.

5. (a) Montrer que les deux intégrales suivantes sont convergentes :

$$I = \int_0^1 \frac{1-e^{-u}}{u}\mathrm{d}u \text{ et } J = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u$$

   (b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \left[\ln(1-x) - \ln(-\ln x)\right]$.

   (c) En déduire le résultat suivant :

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1-e^{-u}}{u}\mathrm{d}u - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u$$

Exercice 2

Dans tout le problème, n est un entier naturel ≥ 2.

Pour toute matrice-colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, d'éléments x_i, on pose : $\|X\| = \underset{i \in \{1,2,\dots,n\}}{Max}\{|x_i|\}$ et, **pour toute matrice** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$: $N(A) = \underset{X \neq 0}{Sup} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$.

Les trois parties du problème sont indépendantes mais utilisent des notations et des méthodes de raisonnement communes.

1ère partie

1. Montrer que : $N(A) \leq \underset{i \in \{1,2,\dots,n\}}{Max}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right\}$.
2.
   a. Montrer qu'il existe $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ tel que : $\dfrac{\|AX_0\|}{\|X_0\|} = \underset{i \in \{1,2,\dots,n\}}{Max}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right\}$.

   b. En déduire la valeur de $N(A)$ exprimée en fonction des éléments de A.

   c. Montrer que, si A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$: $N(AB) \leq N(A)N(B)$.
3.
   a. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que : $|\lambda| \leq N(A)$.

   b. Montrer que, si $\lim_{p \to +\infty} N(A^p) = 0$, alors toutes les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1.

   c. Établir la réciproque de cette dernière propriété lorsque A est diagonalisable.

2ème partie

Dans cette partie, on s'intéresse à des **critères d'inversibilité de la matrice A**.

4. On suppose que A possède un vecteur propre Z (assimilé à une matrice-colonne d'éléments z_i) associé à la valeur propre 0.

   a. Montrer qu'il existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que : $|a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \dfrac{|z_j|}{|z_i|}$.

   b. En déduire qu'il existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que : $|a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.

   c. Déduire de ce qui précède une condition ***suffisante*** d'inversibilité de la matrice A s'exprimant en fonction de ses éléments. Cette condition est-elle nécessaire ?

   d. En déduire également une localisation, dans le plan complexe, des points-images ayant pour affixes les valeurs propres de A.

5. On suppose satisfaite la condition du 4.c. On note : $\delta = \underset{i \in \{1,2,\ldots,n\}}{Min} \left\{ |a_{i,i}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \right\}$.

Soient $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, $V \neq 0$, et $Y = AV$, d'éléments respectifs v_i et y_i.

a. Montrer que : $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $|a_{i,i}||v_i| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}||v_j| \leq |y_i|$.

b. En déduire que : $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $|y_i| \geq |a_{i,i}||v_i| - \|V\| \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

c. Montrer que : $\exists\, i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $\|Y\| \geq \left(|a_{i_0,i_0}| - \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| \right) \|V\|$.

d. En déduire que : $N(A^{-1}) \leq \dfrac{1}{\delta}$.

6. Généralisation de la question 4 : on suppose que :

- il existe $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que : $|a_{k,k}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{k,j}|$ et : $a_{k,k} \neq 0$.
- $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $i \neq k \Rightarrow |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.

On cherche à montrer que A est inversible. Pour cela on raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, non nul, d'éléments z_i, tel que : $AZ = 0$.

a. Montrer que : $\forall i \neq k, \exists\, j \neq i : \begin{cases} a_{i,j} \neq 0 \\ |z_j| > |z_i| \end{cases}$.

b. Montrer que : $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{k,j}| \left(|z_j| - |z_k|\right) \geq 0$

c. En utilisant le 6.a , montrer que : $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{k,j}| \left(|z_j| - |z_k|\right) \leq 0$.

d. En déduire une contradiction et conclure.

Partie 2 : probabilités-statistiques

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants

Exercice 1

Soient U et X deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs positives. On suppose que U suit la loi uniforme sur $[0,1]$, et que X admet une densité f, continue sur $\mathbb{R}_+$ et nulle sur $\mathbb{R}_-$.

1. (a) Déterminer une densité de la variable $A = \ln X$ en fonction de f.

   (b) Déterminer une densité de $B = \ln U$.

   (c) Montrer que la variable $C = \ln(UX)$ admet une densité f_C, et on exprimera pour tout réel t, $f_C(t)$ en fonction de $\int_t^{+\infty} f(e^s)ds$.

2. En déduire que la variable $Y = UX$ admet une densité h que l'on donnera, sur $\mathbb{R}_+^*$, sous forme d'intégrale.

3. On suppose dans cette question que X suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

   (a) Déterminer une densité de Y.

   (b) Soit $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.
   On considère la variable Z_n définie par :
   $$Z_n = \prod_{k=1}^{n} X_k.$$
   Déterminer une densité de Z_n.

4. On considère la fonction f définie par :
   $$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-x^2/2} \text{ si } x \geqslant 0 \\ \\ f(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   (a) Déterminer la valeur du réel α pour que la fonction f soit une densité de probabilité.

   On suppose dans la suite de cette question que la densité de X est cette fonction f.

   (b) Soit S une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\{-1, 1\}$, telle que :
   $$P([S=1]) = P([S=-1]) = \frac{1}{2}.$$
   On suppose en outre que les variables U, X, S sont indépendantes.
   Déterminer la loi de la variable $T = SY$.

5. On considère un entier n supérieur ou égal à 1 et on considère dans cette question $n+1$ variables aléatoires indépendantes $T_0, \ldots, T_n$ qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1 et on définit la variable X par :
   $$X = \sum_{k=0}^{n} T_k.$$

   (a) Déterminer une densité de X.

   (b) Montrer qu'une densité de Y est :
   $$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^k e^{-y}}{k!} \text{ si } y > 0 \\ \\ 0 \text{ si } y \leqslant 0 \end{cases}$$

Exercice 2

Une boulangère vend du pain chaque jour.

La quantité produite de pain un jour donné est fixée de manière déterministe et vaut Q (en kilogrammes). En revanche, la demande de pain est une variable aléatoire $X > 0$ (toujours en kilogrammes). **On suppose que X suit une loi continue, de fonction de répartition F strictement croissante et s'annulant en 0, et admettant une densité continue f.**

Le **coût unitaire de fabrication** (par kilogramme) est c, le **prix de vente unitaire** est p. Il n'y a pas de coût fixe de fabrication. On suppose $\boxed{p > c > 0}$.

1ère partie

Si la demande de pain X est inférieure à l'offre Q, la boulangère ne vend que la quantité X (le pain invendu un jour donné n'est pas remis en vente le lendemain) ; si la demande est supérieure à l'offre, elle ne vend que la quantité produite Q.

Dans ces conditions, on cherche **la quantité optimale Q à produire.**

L'optimalité est à entendre au sens de la **maximisation de l'espérance du bénéfice journalier (produit total de la vente - coût total de fabrication).**

1. Écrire la formule donnant le bénéfice journalier B, en fonction des paramètres p et c, de la quantité Q et de la variable aléatoire X. On introduira en particulier la variable aléatoire indicatrice $\mathbf{1}_{X<Q}$.

2. Exprimer l'espérance de B, soit EB, au moyen des différents paramètres et, éventuellement, d'intégrales faisant intervenir les fonctions f ou F.

3. Montrer que EB possède un *maximum unique* atteint en une valeur Q^* que l'on explicitera en fonction des paramètres et de la fonction F.

2ème partie

La boulangère (qui est en même temps statisticienne) cherche à prévoir sa demande journalière. La demande (aléatoire) X_T qui va s'exprimer à une date T n'est pas connue à l'avance, mais la boulangère fait l'hypothèse que la demande ne varie pas beaucoup d'un jour à l'autre, soit :

$$X_{t+1} = X_t + U_{t+1},$$

où U_{t+1} représente une perturbation (aléatoire) représentant la variation de la demande du jour $t+1$ par rapport à celle du jour t.

On suppose que X_0 est *déterministe* (valeur fixée connue) et que les U_t sont **mutuellement indépendants entre eux, de même loi, d'espérance nulle et de variance $\sigma^2 \neq 0$.**

A une date $T \geq 1$, la boulangère ne dispose malheureusement pas des demandes journalières précédentes : $X_0, X_1, ..., X_{T-1}$, information qu'elle a perdue en partie, mais ne connaît explicitement que la *moyenne de ces demandes* : $\overline{X}_{T-1} = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} X_t$.

4.

a. Étudier la convergence **en probabilité** de la suite $\left\{\frac{X_T}{T}\right\}$ quand $T \to +\infty$

[il s'agit bien ici de X_T *et non de* $\overline{X}_T$ *].*

b. Étudier la convergence **en loi** des suites $\left\{\frac{X_T}{\sqrt{T}}\right\}$, $\left\{\frac{X_T^2}{T}\right\}$ quand $T \to +\infty$.

Il sera utile d'exprimer toutes les variables aléatoires considérées en fonction des U_t.

5.

a. Calculer $E\,\overline{X}_T$ et $V\,\overline{X}_T$ *[il s'agit bien ici de* $\overline{X}_T$ *].*

On rappelle que : $\sum_{k=1}^{T} k^2 = \frac{T(T+1)(2T+1)}{6}$.

b. Peut-il y avoir convergence **dans L_2** de la suite $\{\overline{X}_T\}$ vers une constante quand $T \to +\infty$?

Pour simplifier la suite des calculs, la boulangère suppose que **les U_t suivent une même loi normale**.

6.

a. Calculer la loi de la variable aléatoire $\frac{\overline{X}_T}{\sqrt{T}}$ *[il s'agit bien ici de* $\overline{X}_T$ *].*

b. En déduire la convergence **en loi** de la suite $\{\frac{\overline{X}_T}{\sqrt{T}}\}$ quand $T \to +\infty$.

7. La boulangère sait que sa prévision optimale de la demande X_T du jour T, connaissant $\overline{X}_{T-1}$, est l'espérance conditionnelle : $\boxed{X_T^* = E(X_T / \overline{X}_{T-1})}$ (pour $T \geq 2$).

a. Calculer X_T^*.
b. Donner sa loi.
c. Calculer la variance conditionnelle $V(X_T / \overline{X}_{T-1})$.
d. Calculer $\lim_{T \to +\infty} V(\frac{X_T}{\sqrt{T}} / \overline{X}_{T-1})$.