

Exercice 2

1) La fonction $y = e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$
 $y = 2x^2 - x + 1$ est un polynôme donc défini sur $\mathbb{R}$
 Donc f est définie sur $\mathbb{R}$ comme produit et
 somme de fonctions définies sur $\mathbb{R}$

2) Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - x + 1) = \text{forme indéterminée}$$

$$f(x) = \frac{1}{e^x} \times x^2 \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \quad (\text{par croissances comparées})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) = 0$$

$$\text{donc par somme: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 2$$

$$\text{Par produit et différence de 1: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

Limite en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - x + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1$$

par produit et différence:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$, la courbe représentative de f
 admet une asymptote d'équation $y = -1$ en $+\infty$

$$3) u(x) = e^{-x} \quad v(x) = 2x^2 - x + 1$$

$$u'(x) = -e^{-x} \quad v'(x) = 4x - 1$$

$$f'(x) = -e^{-x} (2x^2 - x + 1) + (4x - 1) e^{-x}$$

$$= e^{-x} (-2x^2 + x - 1 + 4x - 1) = e^{-x} (-2x^2 + 5x - 2)$$



CONCOURS Contrôles externe

ANNÉE 2021

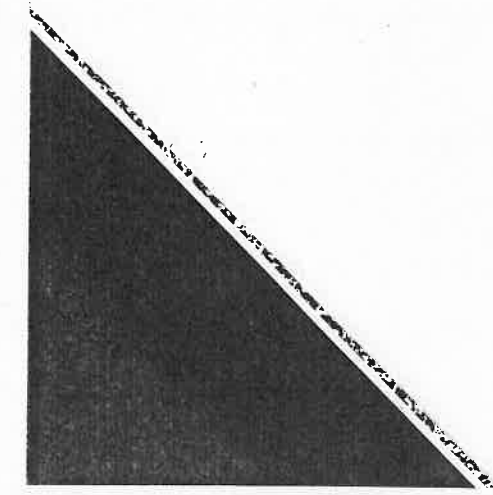
INDIQUEZ VOTRE NUMÉRO DE CANDIDAT

N°

Note :

19,25

N.B : Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe
 quelconque pouvant indiquer la provenance de la copie.



ÉPREUVE

de Mathématiques et statistiques

NOMBRE D'INTERCALAIRES : 6

Exercice 5

Question préliminaire

Le mode est un outil statistique qui désigne la
 valeur de la série qui possède le plus grand
 effectif.

la médiane de la série statistique est la valeur
 qui partage la série en deux groupes de même
 effectifs, tels que au moins 50% des effectifs
 aient une valeur supérieure ou égale à la médiane.

2) Calcul des coordonnées du point G:

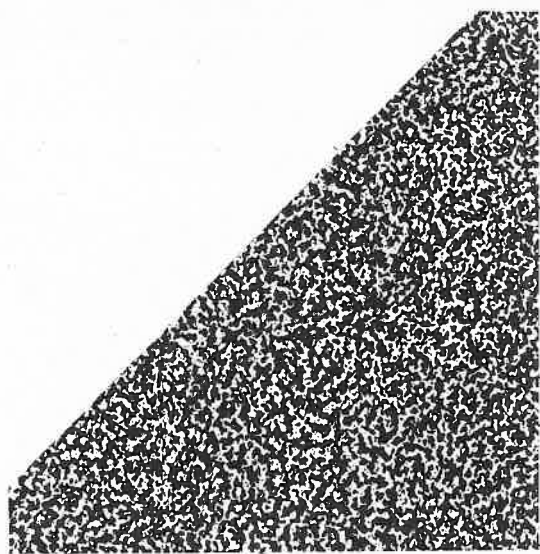
$$G_x = \frac{1+2+3+\dots+16+17+18}{18} = 9,5$$

$$G_y = \frac{188+202+\dots+17770+22244}{18} = \frac{23137}{6} \approx 4866,2$$

G(9,5; 4866,2)

$$3) \frac{17770 - 8833}{8833} \times 100 = \frac{8937}{8833} \approx 99,7\%$$

L'évolution entre le 15 et 17 mars 2010 a été
 d'environ 99,7%



4)

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y_i	188	202	284	377	623	680	902	1231	1383
$P_n(Y_i) = z_i$ à une décimale	5,2	5,3	5,6	5,9	6,4	6,5	6,8	7,1	7,2

t_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Y_i	2083	2412	3323	5134	6683	8833	12567	17770	22244
$P_n(Y_i) = z_i$ à une décimale	7,6	7,8	8,3	8,5	8,8	9,1	9,4	9,8	10,0

5) $\bar{t} = 9,5$ (d'après la question 2)

$$\bar{z} = \frac{5,2 + 5,3 + \dots + 9,8 + 10,0}{18} = \frac{451}{60} \approx 7,5$$

$$\text{Var}(t) = \frac{1}{18} \left((1-9,5)^2 + (2-9,5)^2 + \dots + (18-9,5)^2 \right)$$

$$= \frac{420,75}{18} \approx 23,375$$

$$\text{Var}(z) = \frac{1}{18} \left((5,2-7,5)^2 + (5,3-7,5)^2 + \dots + (10-7,5)^2 \right)$$

$$= \frac{40,33}{18} \approx 2,2$$

$$\text{Cov}(t, z) = \frac{1}{18} \left((1-9,5)(5,2-7,5) + (2-9,5)(5,3-7,5) + \dots + (18-9,5)(10-7,5) \right)$$

$$= \frac{133,65}{18} \approx 7,4$$

Soit la droite d'ajustement d'équation $z = at + b$

$$a = \frac{\text{Cov}(t, z)}{\text{Var}(t)} \approx \frac{7,4}{23,375} \approx 0,3$$

$$b = \bar{z} - a\bar{t} = 7,5 - 0,3 \times 9,5 \approx 4,8$$

Donc une équation de la droite d'ajustement affine de z en t est : $\boxed{z = 0,3t + 4,8}$

$$6) z = 0,3t + 4,8 \Leftrightarrow P_n Y = 0,3t + 4,8$$

$$\Leftrightarrow Y = e^{0,3t + 4,8}$$

$$\Leftrightarrow Y = e^{0,3t} \times e^{4,8}$$

est un ajustement exponentiel du nuage de points $M(t_i, Y_i)$

QCM

1.1) ☒ C : $u_6 = 7$

1.2) ☒ A : $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$

2) ☒ B : non

3.1) ☒ D : 0,375

3.2) ☒ B : non

4) ☒ A : oui

5) ☒ B : $P = 0,06$

6) ☒ A : $P = 0,018$

nombre de
personnes
inférieures

exercice 5

éprouve. Mathématiques et statistiques

Candidat :

1/6

20 000

15 000

10 000

5 000

2 000

1 000

0

1

2

5

8

10

12

15

temps
(en heures
de durée
25/40)

G

Suite exercice 2 :

$e^{-x} > 0$

et

$-2x^2 + 5x - 2 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 9 > 0$

Donc l'équation admet deux solutions réelles.

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{9}}{2 \times (-2)} = 2$$

$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{9}}{-4} = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
e^{-x}		+		+	
$-2x^2+5x-2$	-	0	+	0	-
$f'(x)$	-	0	+	0	-

variations de f

The graph shows the function $f(x) = e^{-x}(2x^2 - 0x + 1) - 1$. The x-axis is marked with $-\infty$, 0, $\frac{1}{2}$, 2, and $+\infty$. The y-axis is marked with 1 and -1. The curve starts at $-\infty$, crosses the x-axis at $x=0$, reaches a local maximum at $x=\frac{1}{2}$, crosses the x-axis again at $x=2$, and then decreases towards $-\infty$. A small square is drawn around the point $(0,0)$ on the curve.

$$4) f(0) = e^{-0}(2 \times 0^2 - 0 + 1) - 1 = 0$$

$$f(2) = 7e^{-2} - 1 < 0$$

D'après le tableau de variations et les valeurs précédentes, on en déduit que f est négatif sur $]0; +\infty[$ et positif sur $]-\infty; 0[$ et $f(0) = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f(x)$	+	0	-

5) Sur l'intervalle 3.

En $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$, les tangentes sont horizontales

$$\text{car } f'(\frac{1}{2}) = f'(2) = 0$$

$$\begin{aligned} 6) h(x) - g(x) &= e^{-x} (4x - 1) - \frac{4x - 1}{2x^2 - x + 1} \\ &= \frac{e^{-x} (4x - 1) (2x^2 - x + 1) - (4x - 1)}{2x^2 - x + 1} \\ &= \frac{(4x - 1) (e^{-x} (2x^2 - x + 1) - 1)}{2x^2 - x + 1} \\ &= \frac{(4x - 1) f(x)}{2x^2 - x + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$4x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\forall x: 2x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 1 = -7 < 0 \quad \text{donc l'équation n'admet pas de solution sur } \mathbb{R}.$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$4x - 1$	-	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	-
$2x^2 - x + 1$	+	+	+	+
$h(x) - g(x)$	-	0	+	-

* $h(x) - g(x)$ est négatif sur $]-\infty; 0[\cup]\frac{1}{4}; +\infty[$

et $h(x) - g(x)$ est positif sur $]0; \frac{1}{4}[$

et $h(x) - g(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = \frac{1}{4}$

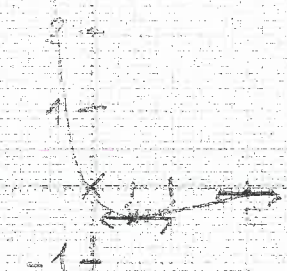
* On en déduit que $\mathcal{C}_h$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]0; \frac{1}{4}[$

$\mathcal{C}_h$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty; 0[\cup]\frac{1}{4}; +\infty[$

et $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en $x = 0$ et $x = \frac{1}{4}$

Exercice 2

4.1



Caractéristiques et Statistique

Conclusion

Suite exercice 2 :8) Dérivons $\phi(x)$:

$$u(x) = e^{-x}$$

$$v(x) = -4x - 3$$

$$u'(x) = -e^{-x}$$

$$v'(x) = -4$$

$$\phi'(x) = -e^{-x}(-4x-3) + (-4)e^{-x} - \frac{4x-1}{2x^2-x+1}$$

$$= e^{-x}(4x+3-4) - \frac{4x-1}{2x^2-x+1}$$

$$= e^{-x}(4x-1) - \frac{4x-1}{2x^2-x+1}$$

$$= h(x) - g(x) = \theta(x)$$

On en déduit donc que ϕ est bien une primitive de θ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

1) Définition des variables : Soient :

x représente le nombre d'élèves ayant choisi Mathématiques et Physique Chimie

y représente le nombre d'élèves ayant choisi Mathématiques et SVT

z représente le nombre d'élèves ayant choisi Physique Chimie et SVT

D'après l'énoncé, le système d'équations donne :

$$\begin{cases} x+y=25 \\ x+z=18 \\ y+z=13 \\ x+y+z=28 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x+y=25 \\ x+z=18 \\ y+z=13 \\ x+y+z=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=25-y \\ z=13-y \\ 25-y+13-y=18 \\ x+y+z=28 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 38-2y=18 \\ x=25-y \\ z=13-y \\ x+y+z=28 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=10 \\ x=25-10=15 \\ z=13-10=3 \\ 15+10+3=28 \text{ (Vérification)} \end{cases}$$

Il y a donc 15 élèves qui ont choisi Mathématiques et Physique Chimie

10 élèves ont choisi Mathématiques et SVT

et 3 élèves ont choisi Physique Chimie et SVT

Exercice 4

1) Soit f une application dérivable donc continue sur $[-1, 5]$ et dérivable sur $] -1, 5[$. Il existe $m = \frac{1}{3}$ et $M = 2$ tels que : $\frac{1}{3} \leq f'(x) \leq 2$ pour tout $x \in] -1, 5[$ alors si $x \in [-1, 5]$:

$$\begin{aligned} \text{On a sur } [-1, x] : \frac{1}{3}(x+1) &\leq f(x) - f(-1) \leq 2(x+1) \\ \frac{1}{3}(x+1) + f(-1) &\leq f(x) \leq 2(x+1) + f(-1) \\ \frac{1}{3}(x+1) - 2 &\leq f(x) \leq 2(x+1) - 2 \\ \frac{1}{3}x - \frac{5}{3} &\leq f(x) \leq 2x \end{aligned}$$

NUMÉRO DE CANDIDAT	ÉPREUVE DE	INTERCALAIRE N°
	Mathématiques et statistiques	5/6

Suite exercice 4 :

$$\begin{aligned} \text{On a sur } [x, 5] : \frac{1}{3}(5-x) &\leq f(5) - f(x) \leq 2(5-x) \\ \frac{1}{3}(5-x) &\leq 2 - f(x) \leq 2(5-x) \\ \frac{1}{3}(5-x) - 2 &\leq -f(x) \leq 2(5-x) - 2 \\ \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x - 2 &\leq -f(x) \leq 10 - 2x - 2 \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x &\leq -f(x) \leq 8 - 2x \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x &\geq f(x) \geq 2x - 8 \end{aligned}$$

2) Sur intercalaire 6

3) * Point d'intersection entre $y = 2x$ et $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ (Point
 $2x = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{3}x = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow x = -1$

et $y = 2 \times (-1) = -2$ $A(-1, -2)$

* Point B d'intersection entre $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ et $y = 2x - 8$
 $\frac{1}{3}x - \frac{5}{3} = 2x - 8 \Leftrightarrow -\frac{5}{3}x = -\frac{19}{3} \Leftrightarrow x = \frac{-19}{-\frac{5}{3}} = \frac{19}{5}$

et $y = \frac{1}{3} \times \frac{19}{5} - \frac{5}{3} = \frac{-2}{5}$ $B\left(\frac{19}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

* Point C d'intersection entre $y = 2x - 8$ et $y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x$

$2x - 8 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x \Leftrightarrow \frac{5}{3}x = \frac{25}{3} \Leftrightarrow x = \frac{25}{3} \times \frac{3}{5} = 5$

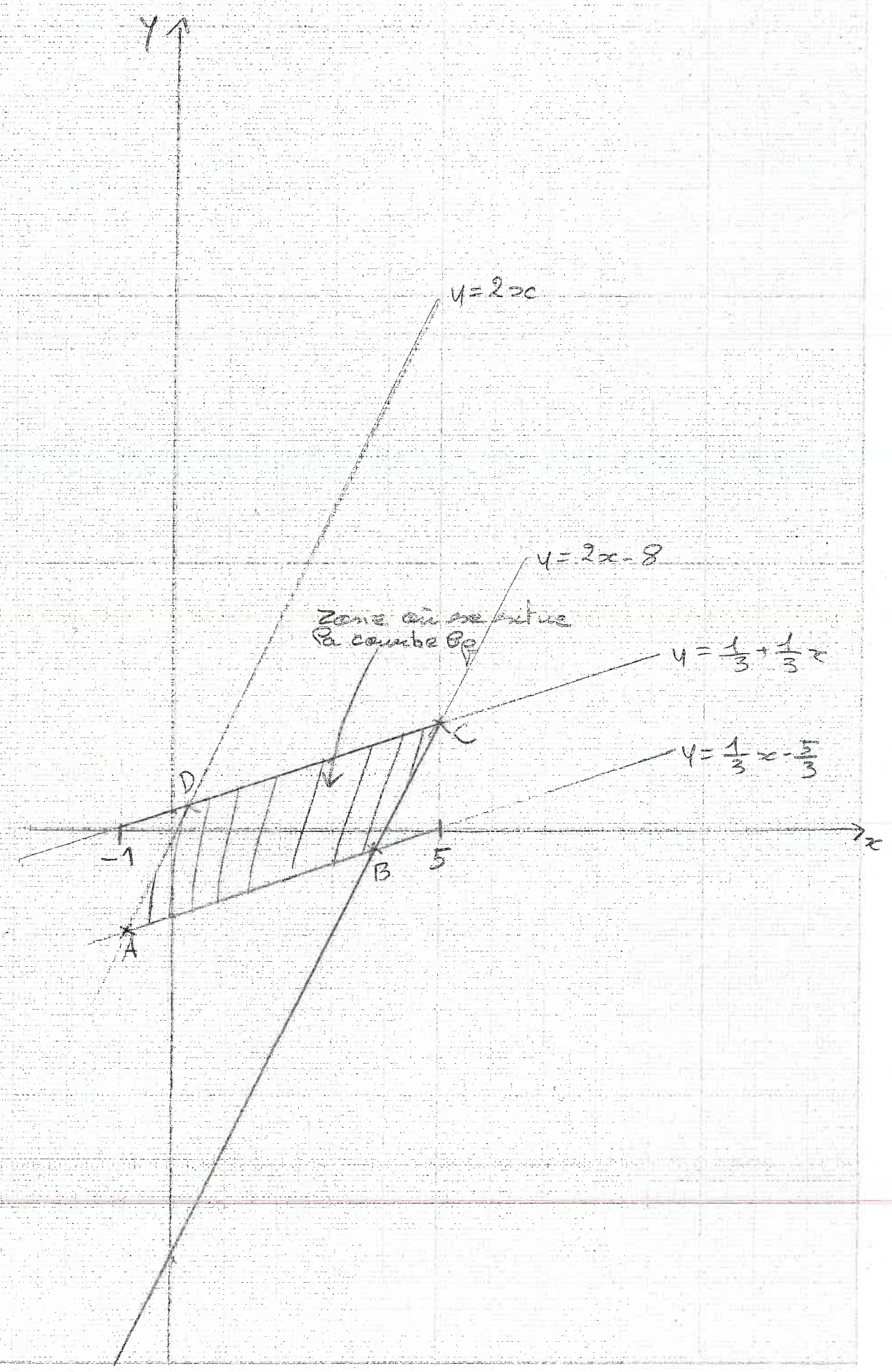
et $y = 2 \times 5 - 8 = 2$ $C(5, 2)$

* Point D d'intersection entre $y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x$ et $y = 2x$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x = 2x \Leftrightarrow \frac{5}{3}x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$

et $y = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ $D\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$

Exercice 4



mathématiques et statistiques

Condition