Programme de mathématiques - statistiques
du concours d'administrateur

Ce programme met en relief une distinction entre les *pré requis*, qui constituent des connaissances préalables nécessaires mais sur lesquelles ne pourront porter en exclusivité les problèmes ou exercices, et *les domaines sur lesquels la connaissance et les compétences seront testées principalement*.

Le programme d'algèbre et analyse correspond à des notions considérées comme essentielles, d'une part, pour la bonne compréhension des matières enseignées dans les cursus de l'ENSAE et dont il convient de vérifier la maîtrise par les candidats ; d'autre part, pour la mise en œuvre des outils de base de probabilité et statistique figurant en partie III.

Les niveaux requis par ces programmes permettent de juger des compétences en mathématiques et statistiques des candidats sans toutefois empiéter sur les notions qui seront reprises et approfondies dans les enseignements de l'ENSAE, notamment en théorie des probabilités et dans les différentes branches de la statistique.

Les connaissances exigées dans les épreuves écrites et orales du concours ne pourront porter que sur les sujets décrits dans ce programme. Néanmoins, les correcteurs auront la possibilité de concevoir des problèmes ou exercices faisant intervenir d'autres notions, à condition de définir celles-ci ou de faire démontrer des résultats les concernant ou d'indiquer lesquels sont admis. Inversement, un candidat faisant référence à un résultat ou un théorème ne faisant pas partie du programme doit être en mesure de l'expliquer ou d'en justifier les conditions d'application.

Prérequis	Domaines de compétences à évaluer
I - Algèbre	
Le corps de base est celui des réels $\boldsymbol{R}$ ou celui des nombres complexes **C**. *Sont à connaître sur les nombres complexes les règles élémentaires de calcul, les notations* $\mathrm{Ré}(z)$,$\mathrm{Im}(z)$, *le complexe conjugué* $\bar{z}$, *le module et l'argument d'un produit, l'inégalité triangulaire, la résolution de l'équation du second degré à coefficients réels et de l'équation* $z^n = a$, *où* a *est un nombre complexe, l'affixe d'un point et d'un vecteur.* *Formules de Moivre et d'Euler.*	
A) Espaces vectoriels, applications linéaires	
Le corps de base est $\boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{C}$. • Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels ; familles libres, génératrices, bases, dimension ; théorème de la base incomplète. • Applications linéaires, noyau, image, rang ; isomorphismes. • Somme directe de sous-espaces, sous-espaces supplémentaires.	• Caractérisations de l'injectivité ou de la surjectivité (en dimension finie ou non). Conservation ou non du caractère libre ou génératrice d'une famille de vecteurs par transformation linéaire. • Endomorphismes usuels : homothéties, projecteurs, symétries, endomorphismes nilpotents. • Théorème du rang lorsque l'espace de départ est de dimension finie.
B) Calcul matriciel	

<table>
<tr><th>Prérequis</th><th>Domaines de compétences à évaluer</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Matrices à n lignes et p colonnes ; opérations sur les matrices ; matrice transposée.
Méthode du pivot de Gauss pour calculer le rang d’une matrice.</td><td>Matrices carrées d'ordre n ; groupe des matrices inversibles, caractérisations de l’inversibilité.
Rang d’une matrice ; relation avec la transposée.
Matrice associée à une application linéaire ; effet d'un changement de base(s), matrices équivalentes, matrices semblables.
Trace d’une matrice.</td></tr>
<tr><th colspan="2">C) Valeurs propres et vecteurs propres</th></tr>
<tr><td></td><td>Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme (ou d'une matrice carrée). L’existence d’une valeur propre est admise dans le cas où le corps de base est C (et espace de dimension finie).
Notion de diagonalisation et de diagonalisabilité. La réduction à une forme triangulaire n’est pas au programme.
Toute somme de sous-espaces propres est directe.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si l'espace est somme directe des sous-espaces propres, y compris quand la dimension de l’espace n’est pas finie.
La notion de polynôme caractéristique n’est pas au programme.</td></tr>
<tr><th colspan="2">D) Algèbre bilinéaire (corps de base R)</th></tr>
<tr><td></td><td>Forme bilinéaire, bilinéaire symétrique
Produit scalaire : orthogonalité de deux vecteurs, de deux sous-espaces vectoriels, norme euclidienne, inégalité de Cauchy-Schwarz
Espaces euclidiens : familles orthogonales, orthonormales, base orthonormée, procédé d’orthonormalisation de Schmidt, expression du produit scalaire sur une base orthonormée, supplémentaire orthogonal d’un sous-espace vectoriel.
Changement de bases orthonormées, matrices orthogonales (aucun résultat général sur la théorie des isométries ne figure au programme), notion de groupe orthogonal.
Endomorphismes particuliers d’un espace euclidien : projecteurs et symétries orthogonales et traduction matricielle sur une base orthonormée.
Admis : toute matrice carrée <u>réelle symétrique</u> est diagonalisable dans le groupe orthogonal.</td></tr>
</table>

Prérequis	Domaines de compétences à évaluer
II – Analyse	
A) Suites de nombres réels	
• Énoncé des propriétés du corps des réels $\boldsymbol{R}$ (admises). • Suites de nombres réels. Limite d'une suite réelle. Unicité de la limite. Opérations sur les limites. Théorèmes d'encadrement. Inégalités sur les limites. • Équivalence des suites, négligeabilité ; notation $v_n = o(u_n)$. • Croissance comparée : limite de la suite $e^{\text{an}} n^b (\ln n)^c$ en fonction de la valeur des réels *a*, *b*, *c*.	• Suites monotones. Théorème de la limite monotone. • Suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. • Suites adjacentes. • Suites extraites, théorème de Bolzano-Weierstrass. • Théorème de Cesaro.
B) Séries numériques	
	• Convergence d'une série. Somme partielle d'ordre *n*. Reste d'ordre *n* et somme d'une série convergente. • Séries à termes positifs : comparaison de deux séries à termes positifs (majorations-minorations, équivalents). Règle de d'Alembert. • Séries à termes réels de signes quelconques : o Convergence absolue. o Séries alternées : condition suffisante usuelle de convergence et majoration de la valeur absolue du reste.
C) Continuité et dérivation	
• Fonctions numériques d'une variable réelle : notion de limite, unicité. Opérations sur les limites, théorèmes d'encadrement. Inégalités sur les limites. Caractérisation séquentielle. • Continuité d'une fonction. Caractérisation séquentielle de la continuité. • Fonctions équivalentes ou négligeables au voisinage d'un point ou de ∞ ; notation $g = o(f)$. • Fonction dérivable ; opérations sur les dérivées : somme, produit, composition. Fonctions de classe C^1, C^2, …, C^∞. Formule de Leibniz. • Sens de variation d'une fonction dérivable. Point d'inflexion. • Application à la construction de la courbe représentative d'une fonction, études locales de telles courbes.	• Propriétés des fonctions continues sur un intervalle fermé borné (segment) : théorème des valeurs intermédiaires, uniforme continuité. • Fonctions monotones. Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle. • Théorème de Rolle. • Théorème et inégalité des accroissements finis. • Formule et inégalité de Taylor-Lagrange avec reste d'ordre *n* ; formule de Taylor avec reste intégral. • Développements limités, théorème de Taylor-Young. • Prolongement d'une fonction et de sa dérivée en un point de non-définition, lorsque la dérivée possède une limite. • Convexité et inégalités de convexité.
D) Fonctions usuelles	

Prérequis	**Domaines de compétences à évaluer**
• Fonctions polynômes, fonctions rationnelles (*leur construction formelle n'est pas au programme*). Degré d'un polynôme. *La division euclidienne entre polynômes n'est pas au programme.* • Factorisation d'un polynôme réel (existence et unicité admises). Le théorème de d'Alembert est admis. • Fonctions circulaires et circulaires réciproques. *Les formules usuelles de trigonométrie à connaître sont limitées aux relations entre cos et sin, ainsi qu'aux valeurs de* $\cos, \sin, \tan$ *pour une somme ou un angle double.* • Fonctions logarithmiques et exponentielles. Fonctions puissances. Fonctions *exp(it)* . Fonctions ch et sh (*la trigonométrie hyperbolique n'est pas au programme*). • Croissance comparée : comparaison, pour x tendant vers zéro ou l'infini, des fonctions x^a, b^x, $(\ln x)^c$ en fonction de la valeur des réels *a*, *b*, *c*.	• Zéros (ou racines) d'un polynôme. • Ordre de multiplicité d'un zéro et caractérisations de l'ordre. *Les liens entre coefficients et racines d'un polynôme ne sont pas au programme.*
E) Intégration sur un segment	
• Intégration des fonctions en escaliers, puis continues par morceaux. • Propriétés de l'intégrale : linéarité, positivité, relation de Chasles. • Notions sur les fonctions en escalier, les fonctions continues par morceaux. • *Les primitives des fonctions usuelles doivent être connues. Aucune technique de calcul sur les primitivations des fractions rationnelles, des fractions rationnelles de cos x et de sin x ou de exp, des fractions rationnelles de x et de* $\sqrt[n]{\frac{\mathrm{ax}+b}{\mathrm{cx}+d}}$*, et des fractions rationnelles de x et de* $\sqrt{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c}$ *n'est exigible*. ·	• Primitives d'une fonction continue sur un intervalle quelconque et lien avec l'intégrale fonction de sa borne supérieure. • Majoration de l'intégrale : $\left\|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\mathrm{d}t$ • Changement de variables, intégration par parties. • 1ère Formule de la moyenne : $\exists c \in [a,b]: \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$, pour f et g continues, $g \geq 0$, • Inégalité de Cauchy-Schwarz. • Sommes de Riemann.

Prérequis	Domaines de compétences à évaluer
F) Intégration sur un intervalle quelconque	
	• Intégrabilité d'une fonction continue ou continue par morceaux sur un intervalle quelconque, notion d'intégrale. • Propriétés de l'intégrale (linéarité, relation de Chasles, inégalité sur la valeur absolue…). • Comparaison d'une série et d'une intégrale. Application à la convergence des séries de Riemann et de Bertrand.
G) Suites et séries de fonctions	
	• Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions ; exemples et contre-exemples. • Théorème de conservation par continuité d'une limite uniforme d'une suite de fonctions continues. • Intégration sur un intervalle [a, b] d'une limite uniforme d'une suite de fonctions continues. • Convergence simple d'une série de fonctions. *Aucun résultat faisant intervenir dans ce § des intégrales sur des intervalles ouverts ou non bornés n'est au programme. Les théorèmes sur la dérivation, la convergence normale d'une série de fonctions et le théorème de convergence dominée ne sont pas au programme.*
H) Fonctions de plusieurs variables (introduction)	
Aucune difficulté théorique n'est soulevée dans ce paragraphe ; les notions introduites ont principalement pour but d'être appliquées et mises en œuvre dans le programme de statistique. *En particulier, les notions sur les intégrales multiples de fonctions continues et les techniques de calcul d'intégrales doubles ou triples sur des domaines élémentaires (changement de variables, passage en coordonnées classiques : polaire, sphérique et cylindrique, théorème de Fubini…) ne peuvent faire l'objet de questions dans ce programme mais devront savoir être utilisées.*	• Fonctions numériques de plusieurs variables réelles, dérivées partielles premières. Gradient • Dérivées partielles d'ordre 2. Interversion de l'ordre des dérivations dès lors qu'elles sont continues (théorème de Schwarz). • Conditions nécessaires du 1^{er} ordre pour un extremum libre sur un produit d'intervalles ouverts.

Prérequis	Domaines de compétences à évaluer
III – Probabilités et statistiques	
A) Probabilités	
• Permutations, arrangements, combinaisons (sans répétition). Formule du binôme de Newton, triangle de Pascal. • Notion de probabilité associée à un ensemble d'événements. *La notion de tribu et la construction explicite d'une mesure de probabilité sur un ensemble ne sont pas au programme.* • Propriétés élémentaires. On introduira le vocabulaire indispensable relatif aux ensembles : réunion, intersection, complémentaire, partition. *Aucun exercice ou problème ne portera exclusivement sur ces notions.*	• Variables aléatoires unidimensionnelles : loi d'une variable aléatoire discrète, densité d'une variable aléatoire continue, fonction de répartition, moments, quantiles. Inégalités de Bienaymé-Tchébychev, de Markov. • Détermination de la loi de f (X), où X est une variable aléatoire, dans les cas usuels (en particulier : cas où *f* est une bijection continue, ou présente un unique extremum). • Couples et *n*-uplets de variables aléatoires, lois jointes, marginales et conditionnelles (lorsque ces lois sont définies par leurs densités) ; densité d'un n-uplet de variables aléatoires indépendantes, densité de la somme de 2 variables aléatoires indépendantes (produit de convolution). • Notion de vecteur aléatoire : matrice de variance-covariance. Application au vecteur gaussien, en particulier en dimension 2. • Notions élémentaires d'espérance et de variance conditionnelles, lorsque les lois conjointes ont des densités. Espace L^1 (resp. L^2) des variables aléatoires intégrables (resp. de carré intégrable). • Étude des principales lois de probabilités usuelles (et lecture des tables): a) Lois de variables discrètes : loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique, loi uniforme, loi de Poisson, loi hypergéométrique. b) Lois de variables continues : loi uniforme, loi normale, loi exponentielle, loi gamma $\gamma(p,\theta)$; *les définitions des lois log-normale, loi du Chi-Deux, loi de Student, loi de Fisher devront être connues sans que soit exigible aucun calcul à leur sujet (moments, densités..)*. *Pour l'étude des lois de ces variables aléatoires, les propriétés élémentaires sur les intégrales multiples (changement de variables, passage en coordonnées polaires, théorème de FUBINI…) pourront être utilisées par les candidats sans qu'ils soient interrogés sur les fondements théoriques de ces outils.*

Prérequis	Domaines de compétences à évaluer
	• Probabilité conditionnelle : définition, propriétés, événements indépendants (deux à deux et mutuellement). Formule de Bayes. Formule des probabilités totales. • Convergence en probabilité (ou stochastique), convergence dans les espaces L^1 et L^2. Étude de la conservation de la convergence par une transformation continue, selon le mode de convergence. • Lois des grands nombres : faible et dans L^2. • Convergence en loi : critères usuels dans le cas des variables aléatoires entières ou réelles. Transformation par continuité. • Théorème central limite.
B) Statistique descriptive	
• Généralités : unités statistiques et variables ; variables qualitatives, ordonnées, quantitatives. • Tableaux statistiques et représentations graphiques usuels.	• Distributions univariées : définitions et représentations usuelles. Indicateurs de position (moyenne, médiane), dispersion (écart-type, variance), concentration (courbe de Lorenz, indice de Gini, quantiles). • Distributions bivariées : définitions et représentations usuelles. Liaisons et indépendance entre variables, coefficient et rapport de corrélation. Distributions marginales et conditionnelles. Ajustement linéaire, méthode des moindres carrés (approche descriptive). • Séries temporelles : représentations graphiques, tendance et saisonnalité, moyennes mobiles ; méthodes simples de désaisonnalisation.
C) Statistique inférentielle	
	• Notions de modélisation et d'estimateurs. Comparaison d'estimateurs : biais, précision, erreur quadratique moyenne, convergence. • Estimation d'un paramètre descriptif (proportion, moyenne, variance) d'une population dans le cadre des modèles d'échantillonnage, estimation d'un paramètre unidimensionnel d'une loi de probabilité. • Construction d'estimateurs dans des cas simples (observations suivant une loi discrète ou admettant une densité continue) : o méthode d'estimation par moments empiriques • Estimation des coefficients de la régression à une variable explicative :

Prérequis	Domaines de compétences à évaluer
	$Y_i = a + \mathrm{b}\mathrm{X}_i + u_i$. Loi des estimateurs sous l'hypothèse de normalité des résidus. • Construction d'un intervalle de confiance dans le cadre des modèles d'échantillonnage, dans le cas où le théorème central limite s'applique. • Notion intuitive de test et élaboration d'un test dans des cas simples. *On se contentera d'une compréhension intuitive de la problématique des tests, les notions de risque et de puissance ne sont pas au programme.*